実 Hahn-Banach の拡張定理

Theorem. X を実線形空間とし, p は X 上で定義された実数値汎関数で

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ (x, y \in X), p(\alpha x) = \alpha p(x)\ (\alpha \geq 0, x \in X)$$

をみたすものとする. M を X の線形部分空間とし, f は

$$f(x) \leq p(x)\ (x \in M)$$

をみたす, M 上で定義された線形汎函数とする. このとき, X 全体で定義された線形汎関数 f_1 で

$$f_1(x) = f(x)\ (x \in M), f_1(x) \leq p(x)\ (x \in X)$$

をみたすものが存在する.

Proof. 証明が長いので, 2 段階で示す.

(1) $L \neq X$ となる X の線形部分空間 L に対して, L 上で定義された線形汎関数で $\ell(x) \leq p(x)\ (x \in L)$ をみたすものとする. また, $x_0 \notin L, L + [x_0] = \{x + \alpha x_0 \mid x \in L, \alpha \in \mathbb{R}\}$ とする. このとき $L \subsetneq L + [x_0]$ となる. このとき

$$g(x) = \ell(x)\ (x \in L), g(x) \leq p(x)\ (x \in L + [x_0])$$

となる線形汎関数 g が存在することを示す.

$x, y \in L$ に対して

$$\ell(x) - \ell(y) = \ell(x-y) \leq p(x-y) \leq p(x+x_0) + p(-y-x_0)$$

より $-p(-y-x_0) - \ell(y) \leq p(x+x_0) - \ell(x)$ が成り立つ. ゆえに

$$\sup_{y \in L} (-p(-y-x_0) - \ell(y)) \leq \inf_{x \in L} (p(x+x_0) - \ell(x))$$

となるから

$$\sup_{y \in L} (-p(-y-x_0) - \ell(y)) \leq \lambda \leq \inf_{x \in L} (p(x+x_0) - \ell(x)) \tag{☆}$$

をみたす λ が存在する. この λ を用いて g を

$$g(x + \alpha x_0) = \ell(x) + \alpha\lambda\ (x + \alpha x_0 \in L + [x_0])$$

と定義する. この g に対して, $\alpha = 0$ を考えることにより

$$g(x) = \ell(x)\ (x \in L)$$

をみたす. また, $\alpha > 0$ のとき不等式 (☆) より

$$g(x + \alpha x_0) = \alpha \left(\ell\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \lambda \right) \leq \alpha p\left(\frac{x}{\alpha} + x_0\right) = p(x + \alpha x_0)$$

が成り立ち, $\alpha < 0$ のときも同様にして $g(x + \alpha x_0) \leq p(x + \alpha x_0)$ を示すことができる. よって, このように $L + [x_0]$ 上で定義された g は求める線形汎関数となる.

(2) 次に, g は $M \subset D(g) \subset X$ なる線形部分空間 $D(g)$ で定義された線形汎函数で

$$g(x) = f(x)\ (x \in M), g(x) \leq p(x)\ (x \in D(g))$$

をみたすものとする. このような g の全体を E で表す. ここで $D(g)$ は g の定義域である. (1) より $E \neq \varnothing$ である. 任意の $g, h \in E$ に対して, h が g の拡張であるとき $g \prec h$ と表すことにすると, $(E, \prec)$ は順序集合となる.

今, F を E の任意の全順序部分集合とすると, F は E の中に上界をもつことを示す.

$D = \bigcup_{g \in F} D(g)$ とすると, D は $M \subset D \subset X$ をみたす X の線形部分空間である. ここで, 各 $x \in D$ に対して, $x \in D(g)$ なる $g \in F$ をとり $f_0(x) = g(x)$ によって, D 上の汎関数 f_0 を定義する. この f_0 は一意に定まる. 実際, $g, h \in F$ に対して $x \in D(g) \cap D(h)$ となった場合, $g \prec h$ または $h \prec g$ のどちらかが成り立ち, どちらの場合であっても $g(x) = h(x)$ が成り立つからである. この f_0 が線形であることおよび

$$f_0(x) = f(x)\ (x \in M), f_0(x) \leq p(x)\ (x \in D)$$

が成り立つことは明らかである.

ゆえに, $f_0 \in E$ であり, 任意の $g \in F$ に対して $g \prec f_0$ が成り立つから f_0 は F の上界である. よって, Zorn の補題から E は少なくとも 1 つの極大元 f_1 をもつ. この f_1 に対して $D(f_1) = X$ であることを示す.

$D(f_1) \neq X$ とすると, $x_1 \neq D(f_1)$ なる X の元が存在する. (1) と同様にして

$$f_2(x) = f_1(x)\ (x \in D(f_1)), f_2(x) \leq p(x)\ (x \in D(f_1) + [x_1])$$

をみたす線形汎関数 f_2 が構成でき, その構成法から $f_1 \precneqq f_2$ となるがこれは f_1 は E の極大元であることに矛盾する. ゆえに, $D(f_1) = X$ であることが示された.

以上により, 定理が示された. ■